分类号 O151.2　　　　密级

U D C 512.6　　　　编号

厦　门　大　学

博 士 后 研 究 工 作 报 告

中文题名：应用矩阵几何与环面导子李代数研究

唐 孝 敏

工作完成日期　2007-07-06

报告提交日期　2007-07-06

厦门大学

2007 年 7 月

应用矩阵几何与环面导子李代数研究

The Study on Applications to Geometry of Matrices and Subalgebras of the Lie Algebra for the Derivations on Torus

博　士　后　姓　名：唐孝敏

流动站（一级学科）名称：数　学

专　业（二级学科）名称：基础数学

研究工作起始时间　2005-09-16

研究工作期满时间　2007-09-16

厦 门 大 学

2007 年 7 月

厦门大学博士后研究工作报告著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用博士后研究工作报告的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交该报告的纸质版和电子版，有权将该报告用于非赢利目的的少量复制并允许该报告进入学校图书馆被查阅，有权将该报告的内容编入有关数据库进行检索，有权将博士后研究工作报告的标题和摘要汇编出版。保密的博士后研究工作报告在解密后适用本规定。

本研究报告属于： 1、保密（ ）， 2、不保密（√）

纸本在 年解密后适用本授权书；

电子版在 年解密后适用本授权书。

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名: 日期： 年 月 日

摘　要

矩阵几何是代数学的一个重要研究领域，它在代数，几何，图论等许多方面都有应用. 保持问题是矩阵代数中一个十分活跃的课题，近年来取得了较多的成果. 矩阵几何与保持问题有密切的关系，将矩阵几何基本定理应用于保持问题，特别是加法保持问题和线性保持问题，是矩阵几何在代数中的重要应用.

仿射 Kac-Moody 代数及其表示在数学物理的许多分支中都有重要应用. 仿射 Kac-Moody 代数可看成从一维环面到复数域上有限维单李代数的多项式映射的泛中心扩张，其导子代数即 Virasoro 代数. Virasoro 代数的表示在仿射 Kac-Moody 代数的可积模的构造及其结构分析和可积模的分类中扮演着重要的角色. 作为其自然推广，人们研究了多变量环面的导子李代数，并对它的表示进行了研究.

本文在介绍了矩阵几何的基本概念、主要成果及线性保持问题的发展概况之后，应用矩阵几何刻划了几类重要的保持问题. 同时，我们也给出了 2 维环面导子李代数的一类子代数，并研究了它的表示. 下面我们更加详细地阐述各章的主要内容.

第二章给出了矩阵几何基本定理在保持问题中的几个应用. 首先，利用长方阵矩阵几何基本定理给出了秩可加可逆加法映射的形式. 其次，利用交错矩阵几何基本定理，我们研究了保粘切的半线性满射.

第三章应用矩阵几何基本定理刻画了方阵空间上保持粘切的加法满射的形式，改进并推广了前人相应的线性保持问题的结论. 我们的方法是设法证明一个保持粘切的加法满射一定是双射，并且证明该映射及其逆均保持粘切，从而应用矩阵几何基本定理的结论解决问题. 同时，我们还刻划了除环上方阵空间的保持一般线性群的加法满射.

第四章首先刻划了三角矩阵空间上强保持矩阵秩交换的加法满射的形式. 然后刻划了强保持 k 元矩阵组秩倒序可交换的加法满射的形式.

第五章给出了域上方阵空间的保幂等映射的形式. 本章考察的映射是非线性 (加法) 的，所考虑的问题与矩阵几何相类似，而且把之前文献的双向幂等保持推

广到单向幂等保持.

第六章首先构造了一个映射从 2 阶复矩阵集合到环面导子李代数集的一个映射，并刻画了在这个映射下像集中的所有子代数，其中包括全导子李代数及斜导子李代数等重要的李代数. 最后研究了这些子代数由相应的线性李代数的表示通过 Larsson 函子给出的表示.

关键词　矩阵几何；保持问题；环面导子李代数；表示；　Larsson 函子

Abstract

The Geometry of Matrices is an important research area of algebra and has many Applications in algebra, geometry and graph theory. The Preserver Problems is an active area in matrix algebra, recently, many results in this area have obtained. There are close relations between Geometry of Matrices and Preserver Problems. Applying the fundamental theorems of Geometry of Matrices to study Preserver Problems, in particular, to study Additive Preserver Problems or Linear Preserver Problems, is an important applications of Geometry of Matrices in algebra.

The affine Kac-Moody algebras and their representation play important roles in many branches in both mathematics and theoretical physics. Affine Kac-Moody algebras can be viewed as certain central extensions of the Lie algebras of polynomial maps of an one dimensional torus into finite dimensional simple Lie algebras over the field of complex numbers, in which there is a important algebra-Virasoro algebra. The representations of the Virasoro algebra play crucial roles in the construction and the analysis of the integrable modules of affine Kac-Moody algebras. As a natural generalization, people study the subalgebras of the lie algebra for the derivations on torus and their representations.

In this paper, after the introduction of the basic concepts, the main results on Geometry of Matrices and the developmental survey on Linear Preserver Problems, we characterize some important Preserver Problems by using the Geometry of Matrices. We also give a class of the subalgebras of the lie algebra for the derivations on torus, and study their representations. The main work of the paper is summarized as follows.

In Section 2, we give some applications of fundamental theorems of Geometry of Matrices to Preservers problems. Firstly, it is given that the forms of invertible additive preservers of rank-additivity on rectangular matrix spaces by using the fundamental theorems of Geometry of rectangular Matrices. Then, we study the semi-linear surjective map that preserve the adjacency on alternate matrix spaces by using the fundamental theorems of Geometry of alternate Matrices.

In Section 3, Using fundamental theorems of Geometry of Matrices, we describe the forms of additive surjective maps preserving adjacency on spaces of square matrices, it improve and generalize the related results. The outline is that, first prove that an additive surjective map preserving adjacency has to be bijective, and this map and its inverse both preserve adjacency, then applying the fundamental theorem of Geometry of matrices, we complete these problems. Meanwhile, we also characterize the additive surjective maps preserving general linear groups on the spaces of square matrices over division rings.

In Section 4, the strong additive preservers of rank commutativity are characterized on triangular matrices. Then we characterize the additive maps that strongly preserve the set of rank reverse permutable matrix k-tuples.

In Section 5, we completely characterize the set in which every map is an idempotence-preserving map. The map may be take non-linear(additive). We consider the problem is like to the Geometry of Matrices, and we get the conclusion under the weaker assumption of idempotence-preserving in one direction.

In Section 6, We first construct a map from the set of 2 by 2 matrices to the set of subalgebras of the lie algebra for the derivations on torus, then we characterize the all algebras of the images under the map. Finally, we study representations of these algebras, which is given by corresponding linear lie algebras-module through the Larsson function.

Keywords Geometry of Matrices; Preserver Problems; Lie algebra for the derivations on torus; Representation; Larsson fuction

目　录

CONTENTS

第 1 章　综述

1.1　课题背景与发展概况

一. 矩阵几何及保持问题

矩阵几何是 20 世纪 40 年代中期华罗庚由于研究多元复变函数论的需要所开创的一个数学领域. 因此开始讨论的是复数域上的四类矩阵几何, 即长方阵几何, 对称阵几何, 斜对称几何和厄米阵几何. 在矩阵几何中, 空间的点是一类矩阵, 例如同样大小的长方阵, 对称阵, 斜对称阵, 或厄米阵, 还有一个变换群作用在这个空间上. 以长方阵几何为例, 设 $\mathbb{D}$ 是一个除环, m 和 n 都是大于 2 的整数, 长方阵几何的空间由所有 $m\times n$ 矩阵组成, 记为 $M_{m\times n}(\mathbb{D})$, $M_{m\times n}(\mathbb{D})$ 中元素称为空间中的点. $M_{m\times n}(\mathbb{D})$ 中所有以下形状的变换: $X\mapsto PXQ+R, \forall X\in M_{m\times n}(\mathbb{D})$, 其中 P 与 Q 分别为 $\mathbb{D}$ 上 m 与 n 阶可逆阵, 而 $R\in M_{m\times n}(\mathbb{D})$. 所有以上形状的变换组成空间 $M_{m\times n}(\mathbb{D})$ 的一个变换群, 把它记做 $G_{m\times n}(\mathbb{D})$, 那么 $\mathbb{D}$ 上长方阵几何研究的问题就是 $M_{m\times n}(\mathbb{D})$ 的图形 (即子集) 在 $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ 作用下不变的性质. 例如, 对任意两个 $m\times n$ 矩阵 X_1 和 X_2 组成的图形, $\mathrm{rank}\,(X_1-X_2)$ 就是在群 $G_{m\times n}(\mathbb{D})$ 作用下的不变量, 称为 X_1 和 X_2 的算术距离. 长方阵几何的一个基本问题就是研究用尽可能少的不变量来刻划这个几何的变换群. 这个问题的答案通常称为这个几何的基本定理.

1945~1947 年间, 华罗庚证明了复数域上四类矩阵几何的基本定理, 他用来刻划变换群中变换的不变量, 有双射, 算术距离, 调和点集, 连续性等. 1949 年他把对称阵几何的基本定理推广到特征不为 2 的任意域上, 而刻划变换群中变换的不变量减为双射和粘切 (如果两个对称阵的算术距离为 1, 则称它们粘切). 1951 年, 他又把长方阵几何的基本定理推广到元素个数大于 2 的任意除环 $\mathbb{D}$ 上, 对 $\mathbb{D}=\mathbb{F}_2$ 的情形, 这个定理是万哲先和王仰贤在 1962 年补证的. 华罗庚证明这个定理的关键是引进了极大集的概念. 两点粘切就是图论中的两个顶点有边相连, 而极大集恰是 20 年后图论中出现的极大完全子图这一概念.

20 世纪 60 年代前期, 在万哲先的组织下, 矩阵几何的研究得到了进一步的

发展, 其中有裴定一关于除环 $\mathbb{D}$ 上长方阵射影几何 (即 $\mathbb{D}$ 上的 Grassmann 流形) 基本定理的详细证明, 这个定理华罗庚曾给出过提纲式摘要. 还有刘木兰关于任意域上 $m \geq 4$ 时 $m \times m$ 交错阵几何的基本定理和交错阵射影几何基本定理 [38].

20 世纪 90 年代前期, 万哲先对矩阵几何做了进一步研究. 他证明了任意域 $\mathbb{F}$ 上, $n \geq 2$ 时, $n \times n$ 对称矩阵的基本定理, 其中 $n = 2, \mathbb{F}$ 是特征 2 的域的情形是高家富、万哲先、冯荣权、王殿军证明的. 他还给出带对合的任意除环 $\mathbb{D}$ 上, $n \geq 2$ 时, $n \times n$ 厄米阵几何的基本定理. 但当 $n = 2$ 时, 还要限定 $\mathbb{D}$ 是域. 当 $\mathbb{D}$ 不是域的情形, 由万哲先和黄礼平在 2002 年解决.

各种类型的矩阵几何的基本定理在代数, 几何和图论中均有应用. 特别, 它们可以叙述成图自同构定理. 例如, 长方阵几何基本定理可以叙述成长方阵组成的图的图自同构的定理. 因此, 华罗庚 1949 年关于对称阵几何的基本定理的论文和 1951 年关于长方阵几何的基本定理的论文是我国最早的图论论文, 也是我国代数组合论最早的论文.

万哲先把我国数学家在矩阵几何方面的工作总结成《矩阵几何》一书 [49], 1996 年在新加坡出版. 这使得矩阵几何这一数学领域在国际上引起关注, 并得到进一步发展. 人们对矩阵几何的进一步研究主要集中于以下几个方面:

(i) 对新的矩阵空间, 确定几何基本定理;

(ii) 减弱不变量的条件, 如变换为单射或者满射的条件是否可以去掉? 是否可以只限定变换本身保持粘切, 而不用限定变换的逆保持粘切?

(iii) 应用已知的矩阵几何基本定理解决其它问题.

保持问题是矩阵代数中一个非常活跃的研究课题, 上面介绍的矩阵几何就是一类矩阵保持问题. 下面我们介绍一下线性保持问题和加法保持问题.

设 S 是一个代数系统 (域, 除环, 一般交换环等), μ_1, μ_2 记 S 上的矩阵半群, 它们常被取作所有的 $n \times n$ 矩阵集合 $M_n(S)$, 所有的 $n \times n$ 对称矩阵集合 $S_n(S)$, 所有的 $n \times n$ 交错矩阵集合 $K_n(S)$, 所有的 $n \times n$ 上三角矩阵集合 $T_n(S)$ 等. 如果一个映射 $\phi : \mu_1 \to \mu_2$ 或满足如下的 (1-1) 和 (1-2), 则称 ϕ 是 μ_1 到 μ_2 的线性映射.

$$\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B), \quad \forall A, B \in \mu_1$$

$$\phi(sA) = s\phi(A)) \quad \forall A \in \mu_1, s \in S$$

特别地，当 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 时，我们也称 ϕ 是 μ 上的线性映射. 刻划从 μ_1 到 μ_2 的保持某些函数，子集，关系，变换等不变量的线性映射的结构问题称为线性保持问题，简记为 LPPs(Linear Preserver Problems).

关于 LPPs 最早的文章是 1897 年 Frobniusr 的 [19] 和 Kantor 的 [30]. 之后一些研究 LPPs 的文章陆续出现，我们可参阅 Marcus 和 Grone 的综述文章 [41, 23]. 特别是近 30 年来， LPPs 问题得到了极大的发展，出现了大量的关于 LPPs 的文献，可见 Li, Guterman 和 Tsing 等的综述文章 [34, 35, 24].

根据有关文献， Lpps(设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$) 主要为如下四个主要类型：

类型 I: 保持映射.

设 F 是 μ 到集合 Ω 上的映射， μ 上的线性映射 ϕ 满足

$$F(\phi(A)) = F(A), \ \ \forall A \in \mu,$$

或当 $\Omega = \mu$ 时

$$F(\phi(A)) = \phi(F(A)), \quad \forall A \in \mu.$$

例如，当 $F(A) = \mathrm{detA}$ 时， Frobenius 在文献 [19] 中分别解决了 $\mu = M_n(\mathbb{C})$, $\mu = S_n(\mathbb{C})$ 及 $\mu = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | \mathrm{tr}A = 0\}$ 的情形. 其中 $\mathbb{C}$ 为复数域， $\mathrm{det}A$ 及 $\mathrm{tr}A$ 分别表示矩阵 A 的行列式与迹. 最近， Dolinar 等在文献 [14] 中去掉了线性的限制而加上了一个较弱的条件得到了行列式保持的结果. 当 $F(A) = \mathrm{rank}\ A$ 时， Minc 在文献 [43] 中解决了 $\mu = M_n(\mathbb{F})$ 的情形，其中 $\mathbb{F}$ 是任意的代数封闭域. 刘绍武和王路群将这个结论推广到了含 1 的交换环上 [39]. Wong 也在非交换局部环上解决了这个问题 [52]. Beasley 等人也解决了 μ 是某些半环的情形 [3]. 又如， Chan 等在文献 [10] 中考虑了 $F(A) = A^k$ 及 $F(A) = A^{ad}$ 的情形，其中 k 是某个固定的正整数， A^{ad} 表示 A 的伴随矩阵.

类型 II: 保持子集.

设 $\nabla \subset \mu$ 为 μ 的子集. μ 上的线性映 ϕ 满足 $\phi(\nabla) \subset \nabla$.

例如, 当 $\nabla = \{A \in \mu | A^2 = A\}$ 时，Chan 等在文献 [10] 中解决了 $\mu = M_n(\mathbb{R})$ 的情形， Beasley 等在元素个数大于 2 的域上研究了这个问题 [2], 刘绍武在文献 [40] 中讨论了主理想整环的情形. 另外，保持子集的 LPPs 的文献还有很多，可参见文献 [7, 8, 50, 42] 等.

类型 III: 保持关系.

设 $\sim$ 是 μ 上的一个关系， μ 上的线性映射 ϕ 满足：

(i)$A \sim B \Rightarrow \phi(A) \sim \phi(B)$ 或

(ii)$A \sim B \Leftrightarrow \phi(A) \sim \phi(B)$

例如，当 $\sim$ 取作交换关系时，即 $A \sim B \Leftrightarrow AB = BA$, Watkins 等刻划了任意域上的非退化映射的情形 [51], 之后 Choi 等又去掉了 "非退化" 的条件进行研究 [11]. 又如，对于由 $A \sim B \Leftrightarrow \text{rank}\,(A-B) \le \text{rank}\,A - \text{rank}\,B$ 定义的关系 (这是一种偏序关系), Guterman 解决了域的元素个数大于 n 的非退化情形 [28]. 后来， Beasley 在文献 [1] 中又去掉了非退化的限制.

值得一提的是, 在保持问题中, 有两个问题是最基本的也是最重要的, 即秩 1 保持问题与幂等保持问题. 其他的很多保持问题都可以归为这两个问题来解决. 矩阵几何可以看成是 (非线性) 的秩差 1 集合保持，也称为双向粘切保持. 我们将在本文中给出单向加法粘切保持的刻画. 类比矩阵几何，我们还将给出 (非线性) 的幂等矩阵的保持问题的刻画.

二. 环面导子李代数及其表示理论

众所周知，仿射 Kac-Moody 代数及其表示在数学物理的许多分支中都有重要应用. 仿射 Kac-Moody 代数可看成从一维环面到复数域上有限维单李代数的多项式映射的泛中心扩张，也就是说，它们以单变量的 Laurent 多项式环为其坐标代数. 单变量的 Laurent 多项式环的导子代数称为 Witt 代数, 而 Witt 代数的泛中心扩张称为 Virasoro 代数. Virasoro 代数的表示在仿射 Kac-Moody 代数的可积模的构造及其结构分析和可积模的分类中扮演着重要的角色 (见 [21, 20]). 此外， Virasoro 代数的表示在理论物理的 string 理论中也得到广泛的研究 (见 [22]), 事实上， Virasoro 代数蕴含在任何具有共形不变量的 2 维时空理论中. 由此可见, 李代数的坐标代数的导子代数及其中心扩张在李代数的表示的研究中起着重要作用，同时它自身在数学和理论物理中也有许多应用.

作为仿射 Kac-Moody 代数的自然推广，文 [25] 引进了扩张仿射李代数的概念. 随后, [6] 等对扩张仿射李代数进行分类时, 发现它们与多变量的 Laurent 多项式 $L = \mathbb{C}[t_1^{\pm1}, \cdots, t_d^{\pm1}]$ 的导子李代数 Der$L$ 有紧密联系. $L = \mathbb{C}[t_1^{\pm1}, \cdots, t_d^{\pm1}]$ 被称为 d 个变量的交换环面. 人们对多变量交换环面的导子李代数 Der$L$ 的结构和表示已有较系统的研究, 并且成功地构造出它的许多有意义的显式表示 ([18, 31, 32]

等).

在上个世纪八十年代末沈光宇构造了交换结合代数的导子李代数上的一大类模，并把他的构造方法应用于除幂代数的导子李代数的模的研究，从而成功地刻画了经典的 Cartan 型李代数及其上的分次模的结构 (见 [46, 47, 48]). 随后，胡乃红进一步对这些模进行了研究（见 [26, 27]), 而张永正和刘文德则将该构造方法应用到模李超代数的研究中 (见 [54]). 另一方面， Rao 利用他在文 [17] 中所构造的 Totoidal 李代数的顶点表示，发现了两个变量的环面上的导子李代数的一类模并研究了其结构 (见 [15]). 稍后他发现所构造的模恰好是 Larsson 在文 [31] 中所构造的从模到模的函子的像模的特例. 他在文 [16] 中研究了在函子作用下有限维不可约模的像模的结构，证明了像模在多数情况下是不可约的，在其它情形他则给出了像模的不可约商模.　Billig 在文 [44] 中成功地利用上述 Der$L$- 模构造了 Toroidal 李代数上的一类顶点表示，文 [4, 5] 则研究了这类模与 Toroidal 李代数的表示之间的关系. 姜翠波等人在研究 Toroidal 李代数可积模的分类时，进一步明确了这类模与李代数的表示之间的关系. 事实上， Larsson 在文 [31] 中所构造的从一般线性李代数的模到 Der$L$- 的函子 F^α 像模就是沈光宇所构造的模的一种特例.

最近，文 [36] 将 [16] 的结果推广到了 A 为非交换量子环面的情形. 文 [37] 在 $d=2$ 时研究了由特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示通过 Larsson 函子给出的量子环面 L 的斜导子李代数的一类表示. 斜导子李代数是全导子李代数的一类子代数. 本文将对全导子李代数的更多的子代数进行研究.

本文首先构造了一个映射 $\mathfrak{L}:\mathbb{C}^{2\times 2}\to\left\{\mathfrak{B}\mid\mathfrak{B}\text{为}\mathrm{Der}L\text{的子代数}\right\}$, 并刻画了 $\mathfrak{L}\left(\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ 中所有子代数，其中包括全导子李代数及斜导子李代数等重要的李代数. 最后研究了 $\mathfrak{L}\left(\mathbb{C}^{2\times 2}\right)$ 中的子代数由相应的线性李代数的表示通过 Larsson 函子给出的表示.

1.2　矩阵几何基本定理的内容

本节给出矩阵下面要用到的长方阵和交错阵矩阵几何基本定理的内容，它的证明我们可以参考 [49].